Chapitre 3. Séries numériques

I. Généralités

1°/ Définitions et notations

Soit $(u_n)_{n\geq 0}$ une suite de nombres réels ou complexes. On considère la nouvelle suite

$$S_n = u_0 + u_1 + \cdots + u_n = \sum_{k=0}^{n} u_k$$

Définition 1 : On appelle série de terme général u_n la suite de terme général S_n.

Définition 2 : On dit que la série de terme général u_n a pour somme S si la suite S_n tend vers S lorsque n tend vers l'infini

$$S = \sum_{n=0}^{+\infty} u_n$$

Si la limite est finie, on dit que la série converge.
Si la limite est infinie, ou n'existe pas, on dit que la série diverge.

Notation : Série de terme général u_n, Série $\sum_{n=0}^{+\infty} u_n$ ou série $\sum u_n$

Définition 3 Si la série $\sum u_n$ a pour somme S (finie) on appelle reste d'ordre k de la série la quantité $R_k = S - S_k$.

Définition 4 : le terme $S_n = u_0 + u_1 + \cdots + u_n$ est appelé somme partielle d'ordre n.

Exemples : 1°/ Séries géométriques

On considère la suite $u_n = a q^n$, $a > 0$, $q > 0$

$$S_n = a \cdot \frac{1 - q^{n+1}}{1 - q}$$



Si $q<1$, $S_n \longrightarrow \frac{a}{1-q}$. La série $\sum aq^n$ converge

Si $q>1$ $q^{n+1} \to +\infty$, $\sum_{k=0}^{n} aq^k \to -\infty$ donc $\sum aq^n$ diverge

Si $q=1$ $S_n = (n+1)a \to +\infty \Rightarrow \sum aq^n$ diverge.

Exemples :

2°/ Soit la suite $u_n = \frac{1}{n(n+1)}$. $n \geq 1$.

$$u_n = \frac{1}{n(n+1)} = \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}$$

$$S_n = u_1 + \cdots + u_n = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{2} - \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}$$

$$= 1 - \frac{1}{n+1} \underset{n \to +\infty}{\longrightarrow} 1$$

On dit que la série $\sum u_n = \sum \frac{1}{n(n+1)}$ est convergente et sa somme vaut 1.

Remarque : La nature d'une série ne change pas si on change un nombre fini de ses termes.

En effet. Soient

$$S_n = \underbrace{U_0 + U_1 + \cdots + U_p}_{a} + U_{p+1} + \cdots + U_n$$

$$S'_n = \underbrace{U'_0 + U'_1 + \cdots + U'_p}_{b} + U_{p+1} + \cdots + U_n$$

$$S_n - S'_n = a - b \quad \Leftrightarrow \quad S_n = S'_n + (a-b)$$

$$(S_n) \text{ cv} \Leftrightarrow (S'_n) \text{ cv}.$$

(*)

Structures algébriques

1°/ Soient $\sum u_n$ et $\sum v_n$ deux séries. On appelle série somme de $\sum u_n$ et $\sum v_n$ la série de terme général : $u_n + v_n$.

2°/ Si $\lambda \in \mathbb{R}$ (ou $\mathbb{C}$). On donne un sens au produit de $\sum u_n$ par λ en écrivant

$$\lambda\left(\sum u_n\right) = \sum \lambda u_n$$

3°/ L'ensemble des séries numériques convergentes muni des deux lois + et (.) est un espace vectoriel sur $\mathbb{K}$ ($\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$).

II. Conditions de convergence des séries

Définition : Une série $\sum_{n\geq 0} u_n$ est dite de Cauchy si

$$\forall \varepsilon > 0 \ \exists N > 0 \ \& \ \forall q > p \geq N \Rightarrow \left| \sum_{k=p+1}^{q} u_k \right| \leq \varepsilon.$$
$N \in \mathbb{N}$

Proposition. Une série est convergente si et seulement si elle est de Cauchy.

Preuve la série $\sum_{n\geq 0} u_n$ converge $\Leftrightarrow$ la suite $(S_n)_{n\geq 0}$ converge

$\Leftrightarrow (S_n)_{n\geq 0}$ est une suite de Cauchy.

$\Leftrightarrow$

$$\forall \varepsilon > 0 \ \exists N \in \mathbb{N}, \ \forall q > p \geq N \quad |S_q - S_p| = \left| \sum_{k=p+1}^{q} u_k \right| \leq \varepsilon$$

$\Leftrightarrow$

La série $\sum_{n\geq 0} u_n$ est de Cauchy.

Proposition 2 Soit $\sum_{n\geq 0} u_n$ une série convergente. Alors

$\lim_{n\to+\infty} u_n = 0$.

Preuve : $u_n = S_{n+1} - S_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} S - S = 0$.

⚠ **Remarque** si $\lim_{n\to+\infty} u_n = 0$, la série $\sum_{n\geq 0} u_n$ n'est pas nécessairement convergente !

La série $\sum_{n\geq 1} \frac{1}{n}$ n'est pas de Cauchy ; car

$$S_{2n} - S_n = \sum_{k=n+1}^{2n} \frac{1}{k} \geq n \cdot \frac{1}{2n} = \frac{1}{2}.$$

Donc $\sum_{n\geq 1} \frac{1}{n}$ n'est pas convergente et pourtant $\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n} = 0$.



Définition : Une série $\sum_{n\geq 0} u_n$ est dite absolument convergente si la série $\sum_{n\geq 0} |u_n|$ est convergente.

Proposition 3 Toute série absolument convergente est convergente.

Preuve : soit $\sum_{n\geq 0} u_n$ une série absolument convergente.
Donc la série $\sum_{n\geq 0} |u_n|$ est de Cauchy :

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists N \in \mathbb{N} \quad \forall q > p \geq N \Rightarrow \left|\sum_{k=p+1}^{q} u_k\right| \leq \sum_{k=p+1}^{q} |u_k| \leq \varepsilon.$$

Donc la série $\sum_{n\geq 0} u_n$ est de Cauchy et par suite, elle est convergente.

⚠ **Remarque** : La réciproque de la proposition 3 n'est pas toujours vraie. Une série peut être convergente sans être absolument convergente.
On verra que la série $\sum_{n\geq 1} \frac{(-1)^n}{n}$ est convergente mais $\sum_{n\geq 1} \frac{|(-1)^n|}{n} = \sum_{n\geq 1} \frac{1}{n}$ est divergente (car n'est pas de Cauchy)

La notion de convergence absolue, nous ramène à étudier les séries numériques à termes positifs, qui constituent le cas le plus simple. L'hypothèse de positivité des termes de la série équivaut à supposer que les sommes partielles forment une suite croissante. La comparaison avec une série géométrique permet souvent de conclure.



III Séries numériques à termes positifs. III.1. Généralités.

<u>Rappel</u>. Une suite de nombres réels croissante est convergente si, et seulement si, elle est majorée.

<u>Définition</u>: Une série $\sum_{n\geq 0} u_n$ est à termes positifs si $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_n \geq 0$.

<u>Théorème 1</u>. Une série à termes positifs $\sum_{n\geq 0} u_n$ est convergente si, et seulement si,

$$\exists M > 0 \text{ tel que } S_n = \sum_{k=0}^{n} u_k \leq M, \forall n \in \mathbb{N}.$$

<u>Preuve</u>. La suite $(S_n)_{n\geq 0}$ t.q. $S_n = \sum_{k=0}^{n} u_k$ est croissante.

Donc, d'après le rappel:

La suite $(S_n)_{n\geq 0}$ est convergente si, et seulement si, $(S_n)_{n\geq 0}$ est majorée.

<u>Exemple</u> Soit la série $\sum_{n\geq 1} u_n$ où $u_n = \frac{1}{n(n+1)}$

On a $\frac{1}{n(n+1)} = \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}$,

Alors $S_n = \sum_{k=1}^{n} u_k = 1 - \frac{1}{n+1} \leq 1 \quad \forall n \geq 1$.

$(S_n)_{n\geq 1}$ est majorée et par suite $\sum_{n\geq 1} \frac{1}{n(n+1)}$ est convergente (Elle converge vers 1).

III.2. Critères de comparaison.

<u>Théorème 2</u>. Soient $\sum_{n\geq 0} u_n$ et $\sum_{n\geq 0} v_n$ deux séries à termes positifs telles que $\forall n \in \mathbb{N}$ $u_n \leq v_n$ alors

i/ $\sum_{n\geq 0} v_n$ converge $\Rightarrow \sum_{n\geq 0} u_n$ converge

ii/ $\sum_{n\geq 0} u_n$ diverge $\Rightarrow \sum_{n\geq 0} v_n$ diverge

Preuve i/ On a $\sum_{k=0}^{n} u_k \leq \sum_{k=0}^{n} v_k$. Puisque $\sum_{n\geq 0} v_n$ est convergente ceci implique que $\sum_{k=0}^{n} v_k$ est majorée, il en est de même de $\sum_{k=0}^{n} u_k$. Donc $\sum_{n\geq 0} u_n$ est convergente.

ii/ Il suffit de prendre la contraposée.

Exemples.

1/ La série $\sum_{n\geq 1} \frac{1}{n^2}$ est convergente.

$\forall n \geq 2 \quad 0 \leq \frac{1}{n^2} \leq \frac{1}{n(n-1)}$. Or $\sum_{n\geq 2} \frac{1}{n(n-1)}$ est convergente

Donc $\sum_{n\geq 1} \frac{1}{n^2}$ est convergente.

2/ $\sum_{n\geq 1} \frac{1}{\sqrt{n}}$ est divergente car $0 \leq \frac{1}{n} \leq \frac{1}{\sqrt{n}} \; \forall n \geq 1$

et $\sum_{n\geq 1} \frac{1}{n}$ est divergente.

Corollaire. Soient $\sum_{n\geq 0} u_n$ et $\sum_{n\geq 0} v_n$ deux séries à termes positifs tels qu'il existe deux constantes positives a et b vérifiant :

$$a u_n \leq v_n \leq b u_n \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

Alors les deux séries sont de même nature.

REMARQUES 1/ Tous ces résultats de comparaison restent valables si on suppose que les inégalités sont vraies seulement à partir d'un certain $n_0 \in \mathbb{N}$.



2°/ On a donc une méthode pour étudier les séries à termes positifs : On les compare, en majorant ou en minorant, au stock des séries dont on connaît la nature.

Voici une conséquence très utile du théorème 2.

<u>Théorème 3</u>. Soient $\sum_{n\geq 0} u_n$ et $\sum_{n\geq 0} v_n$ sont deux séries à termes positifs, et si $(u_n)_{n\geq 0}$ et $(v_n)_{n\geq 0}$ sont des suites équivalentes quand $n \to +\infty$ (C'st à dire $\frac{u_n}{v_n} \to 1$) alors les deux séries sont de même nature.

<u>Preuve</u>. Pour n assez grand, on a

$$\frac{1}{2} \leq \frac{u_n}{v_n} \leq \frac{3}{2} \Rightarrow \frac{1}{2} v_n \leq u_n \leq \frac{3}{2} v_n$$

D'après le corollaire précédent, $\sum_{n\geq 0} u_n$ et $\sum_{n\geq 0} v_n$ sont de même nature.

<u>Exemple</u>. $\sum_{n\geq 1} \sin \frac{1}{n^2}$ est convergente.

De même $\sum_{n\geq 1} \ln\left(\sin\left(\frac{1}{n^2}\right)+1\right)$ est convergente.

Plus généralement, on a le théorème suivant :

<u>Théorème 4</u>. Soient $\sum_{n\geq 0} u_n$ et $\sum_{n\geq 0} v_n$ deux séries à termes positifs. Si $\lim_{n\to+\infty} \frac{u_n}{v_n} = l \neq 0$, l finie alors

$\sum_{n\geq 0} u_n$ et $\sum_{n\geq 0} v_n$ sont de même nature.

<u>Preuve</u>. Pour n assez grand, on a

$$\frac{l}{2} v_n \leq u_n \leq \frac{3l}{2} v_n$$

<u>Alors</u> $\sum_{n\geq 0} u_n$ et $\sum_{n\geq 0} v_n$ sont de même nature.

⚠ Remarques i/ Si $l=0$, le résultat du théorème 4 n'est pas valable. Par exemple : $u_n=\frac{1}{n^2}$, $v_n=1$.

On a $\lim_{n\to+\infty}\frac{u_n}{v_n}=0$, $\sum_{n\geq 1}u_n$ est convergente et $\sum_{n\geq 0}v_n$ est divergente.

ii/ De même pour $l=+\infty$. On peut prendre $u_n=1$ et $v_n=\frac{1}{n^2}$ et on aura la conclusion.

III. 3. Comparaison à une intégrale généralisée

Théorème 5. Soit f une fonction positive, continue et décroissante à partir de $x\geq a$.

Posons $u_n=f(n)$.

Alors la série $\sum u_n$ et l'intégrale $\int_a^{+\infty}f(x)\,dx$ sont de même nature.

Preuve. On suppose que f est positive et décroissante pour $x\geq 1$ (sinon on modifie f).

Soit $k\in\mathbb{N}$, $k\geq 1$, on a $\forall x\in[k,k+1]$

$$f(k+1)\leq f(x)\leq f(k)$$

$$u_{k+1}=f(k+1)=\int_k^{k+1}f(k+1)\,dx\leq\int_k^{k+1}f(x)\,dx\leq\int_k^{k+1}f(k)\,dx=f(k)=u_k$$

La somme membre à membre implique

$$\sum_{k=2}^{n}u_k\leq\int_1^n f(x)\,dx\leq\sum_{k=1}^{n-1}u_k.$$

Par passage à la limite, on conclut.

Exemple Soit $\alpha\in\mathbb{R}^{+*}$. $\sum_{n\geq 1}\frac{1}{n^\alpha}$ est dite une série de Riemann.

On sait que $\int_1^{+\infty}\frac{dx}{x^\alpha}$ est convergente si, et seulement si, $\alpha>1$.

(f vérifie les hyp. du th. 5)

Donc, une série de Riemann $\sum_{n\geq 1}\frac{1}{n^\alpha}$ est convergente si, et seulement si, $\alpha>1$.

Proposition (Comparaison avec les séries de Riemann)

Soit $\sum u_n$ une série à termes positifs.

i/ s'il existe $M > 0$, $\alpha > 1$ et $N \in \mathbb{N}$ tels que $n^\alpha u_n \leq M$ pour tout $n \geq N$ (en particulier si $n^\alpha u_n \underset{n \to +\infty}{\longrightarrow} \ell$ fini), alors la série $\sum u_n$ est convergente.

ii/ S'il existe $M > 0$, $\alpha \leq 1$ et $n \in \mathbb{N}$ tels que $n^\alpha u_n \geq M$ pour tout $n \geq N$ (en particulier si $n^\alpha u_n \underset{n \to +\infty}{\longrightarrow} \ell$ ($\ell \neq 0$) ou bien $+\infty$), alors la série est divergente.

Preuve. Evidente.

Exemple Série de Bertrand. Ce sont les séries de la forme $\sum_{n \geq 2} \frac{1}{n^\alpha (\ln n)^\beta}$. $\alpha, \beta > 0$.

i/ Si $\alpha > \mu > 1$, alors $n^\mu \cdot \left(\frac{1}{n^\alpha (\ln n)^\beta}\right) \underset{n \to +\infty}{\longrightarrow} 0$. Donc la série converge.

ii/ Si $\alpha < \mu < 1$, alors $n^\mu \left(\frac{1}{n^\alpha (\ln n)^\beta}\right) \underset{n \to +\infty}{\longrightarrow} +\infty$. Donc la série diverge.

iii/ Si $\alpha = 1$ et $\beta \neq 1$ alors $\int_2^{+\infty} \frac{dx}{x(\ln x)^\beta} = \frac{1}{1-\beta} \left[\frac{1}{(\ln x)^{\beta-1}}\right]_2^{+\infty}$.

Donc la série converge si $\beta > 1$ et diverge si $\beta < 1$.

iv/ Si $\alpha = 1 = \beta$; $\int_2^{+\infty} \frac{dx}{x \ln x} = \left[\ln(\ln(x))\right]_2^{+\infty}$.

Donc la série diverge.

En résumé, une série de Bertrand converge si, et seulement si, $\alpha > 1$ ou bien $\alpha = 1$ et $\beta > 1$.
$\beta > 0$

Comparaison à une série géométrique

Proposition : (Critère de Cauchy)

Soit $\sum u_n$ une série à termes positifs.

i/ s'il existe $0<k<1$, $N \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $n \geq N$, on ait $\sqrt[n]{u_n} \leq k$; alors la série $\sum u_n$ est convergente

ii/ s'il existe $k \geq 1$, $N \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $n \geq N$ $\sqrt[n]{u_n} \geq k$ alors la série $\sum u_n$ diverge et u_n ne tend pas vers 0, quand n tend vers $+\infty$.

Preuve

i/ $\sqrt[n]{u_n} \leq k \Rightarrow u_n \leq k^n$.

Or la série géométrique $\sum k^n$ est convergente pour $0<k<1$ alors $\sum u_n$ est convergente.

ii/ $\sqrt[n]{u_n} \geq k \ (\geq 1) \Rightarrow u_n \geq k^n \ (\geq 1)$ alors

$u_n \underset{n \to +\infty}{\not\to} 0$ et par suite $\sum u_n$ diverge.

Règle pratique (Règle de Cauchy)

Soit $\sum u_n$ une série à termes positifs telle que $\lim_{n \to +\infty} \sqrt[n]{u_n} = l$ alors

1/ si $l<1$, $\sum u_n$ est convergente

2/ si $l>1$, $\sum u_n$ est divergente

3/ si $l=1$, on ne peut rien conclure.

Preuve. Pour $l<1$ et $l>1$, on utilise la définition de la limite et le critère de Cauchy.

Exemples

1°/ $\sum_{n\geq 1} \frac{1}{n^n}$. On a $\sqrt[n]{u_n} = \frac{1}{n} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0 < 1$. D'où la série est convergente.
(Règle de Cauchy)

2°/ $\sum_{n\geq 1} \left(\frac{n+1}{2n}\right)^n$. On a $\sqrt[n]{u_n} = \frac{n+1}{2n} \xrightarrow[n\to+\infty]{} \frac{1}{2} < 1$. D'où la série est convergente
(Règle de Cauchy)

3°/ $\sum_{n\geq 0} \left(\frac{1}{3+\sin n}\right)^n$. On a $\sqrt[n]{u_n} = \frac{1}{3+\sin n}$

Or $\frac{1}{4} \leq \frac{1}{3+\sin n} \leq \frac{1}{2}$. Et en appliquant le Critère de Cauchy

On déduit que $\sum_{n\geq 0} u_n$ est convergente.

Proposition. Soient $\sum u_n$ et $\sum v_n$ deux séries à termes positifs telles que

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} \leq \frac{v_{n+1}}{v_n} \quad \text{pour } n \geq N. \text{ Alors}$$

i/ Si la série $\sum v_n$ est convergente, alors $\sum u_n$ est convergente

ii/ Si la série $\sum u_n$ est divergente, alors $\sum v_n$ est divergente

Preuve 1/ $\forall n \geq N$, on a $\frac{u_n}{u_N} \leq \frac{v_n}{v_N} \Rightarrow u_n \leq \frac{u_N}{v_N} v_n$

Or $\frac{u_N}{v_N}$ est une constante, et par suite si $\sum v_n$ est convergente

alors $\sum u_n$ l'est aussi.

2°/ De même $\frac{v_N}{u_N} u_n \leq v_n$ et par suite si $\sum u_n$ est divergente alors $\sum v_n$ l'est aussi.

Proposition (Critère d'Alembert)

Soit $\sum u_n$ une série à termes positifs.

i/ s'il existe $k < 1$, $N \in \mathbb{N}$ tel que $\frac{u_{n+1}}{u_n} \leq k$ $\forall n \geq N$ alors $\sum u_n$ est convergente.

ii/ s'il existe $k \geq 1$, $N \in \mathbb{N}$, t.q. $\frac{u_{n+1}}{u_n} \geq k$ $\forall n \geq N$ alors $\sum u_n$ est divergente.

Preuve.

i) $\forall n \geq N$ on a $\frac{U_{n+1}}{U_n} \leq k^{<1} \Rightarrow \frac{U_{n+1}}{U_n} \leq \frac{k^{n+1}}{k^n}$.

On pose $v_n = k^n$. puisque $k<1$, la série $\sum v_n$ est convergente

Alors $\sum U_n$ est aussi convergente.

ii) De même $\forall n \geq N$, on a $\frac{U_{n+1}}{U_n} \geq k \; (\geq 1) \Rightarrow \frac{U_{n+1}}{U_n} \geq \frac{k^{n+1}}{k^n}$.

On pose $v_n = k^n \; (+k \geq 1)$. $\sum v_n$ est divergente

alors il en est de même de $\sum U_n$.

Règle pratique (Règle de d'Alembert)

Soit $\sum U_n$ une série à termes positifs telle que

$\lim\limits_{n \to +\infty} \frac{U_{n+1}}{U_n} = l$. Alors.

1) si $l<1$, $\sum U_n$ est convergente.

2) si $l>1$, $\sum U_n$ est divergente

3) si $l=1$, Cas douteux.

Preuve. Pour $l<1$ et $l>1$, on utilise la définition de la limite et le critère de d'Alembert.

Exemples.

1°/ $\sum\limits_{n \geq 1} \frac{1}{n!}$ est convergente, car $\frac{U_{n+1}}{U_n} = \frac{1}{n+1} \xrightarrow[n \to +\infty]{} 0$.

2°/ $\sum\limits_{n \geq 1} \frac{n!}{n^n}$ est convergente, car $\frac{U_{n+1}}{U_n} = \left(\frac{n}{n+1}\right)^n = \left(1+\frac{1}{n}\right)^{-n}$

$$\frac{U_{n+1}}{U_n} = e^{-n\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)} \underset{+\infty}{\sim} e^{-1} < 1.$$

Remarques 1°/ On préfèrera la règle de d'Alembert si (U_n) comporte des factorielles et celle de Cauchy s'il comporte des puissances $n$ièmes.

2°/ Règle de Duhamel. Si $\lim\limits_{n \to +\infty} \frac{U_{n+1}}{U_n} = 1$. Alors $\frac{U_{n+1}}{U_n} = \frac{1}{1+\frac{\alpha_n}{n}}$, $n \geq N$, $\alpha_n > 0$.

Si $\lim\limits_{n \to +\infty} \alpha_n = l$. $\Rightarrow \begin{cases} l>1 & \Rightarrow \sum U_n \text{ converge} \\ l<1 & \Rightarrow \sum U_n \text{ diverge.} \\ l=1 & \text{cas douteux.} \end{cases}$

IV. Séries de signe quelconque

IV 1. Séries absolument convergentes (Voir précédement)

IV.2. Séries d'Abel.

Définition (Série d'Abel) Une série d'Abel est une série de la forme $\sum_{n\geq 0}\alpha_n v_n$ vérifiant :

i) $\lim_{n\to+\infty} v_n = 0$

ii) La série $\sum_{n\geq 0}|v_n - v_{n+1}|$ est convergente

iii) $\exists M>0 \quad \forall q>p\geq 0 \quad \left|\sum_{k=p+1}^{q}\alpha_k\right|\leq M.$

Remarque Si la suite $(v_n)_{n\geq 0}$ est décroissante, alors l'hypothèse ii) de la définition de la série d'Abel est automatiquement vérifiée.

En effet $\sum_{k=0}^{n}|v_k - v_{k+1}| = \sum_{k=0}^{n}(v_k - v_{k+1}) = v_0 - v_{n+1} \xrightarrow[n\to+\infty]{} v_0$ (avec $v_{n+1} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$)

Théorème

Toute série d'Abel est convergente.

Preuve : soit $p<q$. On note $w_k = \alpha_{p+1}+\alpha_{p+2}+\dots+\alpha_k$, $k\geq p+1$

$$|\alpha_{p+1}v_{p+1}+\dots+\alpha_q v_q| = \left|v_{p+1}w_{p+1} + v_{p+2}(w_{p+2}-w_{p+1})+\dots+ v_{q-1}(w_{q-1}-w_{q-2}) + v_q(w_q-w_{q-1})\right|$$

$$= \left|w_{p+1}(v_{p+1}-v_{p+2})+\dots+w_{q-1}(v_{q-1}-v_q)+w_q v_q\right|$$

$$\leq \sum_{k=p+1}^{q-1} \underbrace{|w_k|}_{\leq M}|v_k-v_{k+1}| + \underbrace{|w_q|}_{\leq M}|v_q|$$

$$\leq M\left(\sum_{k=p+1}^{q-1}|v_k-v_{k+1}| + |v_q|\right) \quad (*)$$

Les hypothèses d'une série d'Abel impliquent que :

$\forall \varepsilon>0 \quad \exists N\in\mathbb{N} \quad \forall q>p>N$, on a :

- $|v_q|\leq \frac{\varepsilon}{2M}$ (car $\lim_{n\to+\infty} v_n=0$)
- $\sum_{k=p+1}^{q-1}|v_k-v_{k+1}|\leq\frac{\varepsilon}{2M}$ (car $\sum|v_n-v_{n+1}|$ est convergente donc de Cauchy)

Ainsi $\sum_{n\geq 0} \alpha_n v_n$ est une suite de Cauchy. Elle est donc convergente

De plus, si on fait tendre $q \to +\infty$, (*) devient

$$\left|\sum_{k=p+1}^{+\infty} \alpha_k v_k\right| \leq M\left(\sum_{k=p+1}^{+\infty}|v_k - v_{k+1}|\right).$$

Exemples (Cas particuliers dans le cadre de la Série d'Abel)

Exemple 1 : Séries alternées

Définition : La série $\sum u_n$ est dite alternée si pour tout n, on a : $u_n = (-1)^n |u_n|$.

ou encore si pour tout n, $u_n \cdot u_{n+1} \leq 0$.

Proposition : Soit $\sum_n u_n$ une série alternée telle que la suite $(|u_n|)_n$ est décroissante et tend vers 0, alors $\sum_n u_n$ est une série d'Abel. Donc convergente

Preuve. On pose $\alpha_n = (-1)^n$ et $v_n = |u_n|$

La série $\sum_n u_n = \sum_n (-1)^n |u_n| = \sum_n \alpha_n v_n$ vérifie les hypothèses d'une séries d'Abel. Donc Convergente.

Exemple $\sum_{n\geq 1} \frac{(-1)^n}{n^\alpha}$ est convergente $0 < \alpha \leq 1$. (*)

Exemple 2 Séries trigonométriques

On prend $(v_n)_n$ une suite décroissante vers 0 et $\alpha_n = e^{inx}$ avec $x \neq 2k\pi$ ($k \in \mathbb{Z}$). On a

$$\alpha_{p+1} + \cdots + \alpha_q = e^{i(p+1)x}\left[1 + \cdots + e^{ix(q-(p+1))}\right] = e^{i(p+1)x}\left[\frac{1 - e^{i(q-p)}}{1 - e^{ix}}\right]$$

$$|\alpha_{p+1} + \cdots + \alpha_q| \leq \frac{2}{|1 - e^{ix}|} = \frac{2}{|e^{ix/2} - e^{-ix/2}|} = \frac{1}{|\sin\frac{x}{2}|} = M.$$

Alors les séries $\sum_{n\geq 0} v_n \cos nx$ et $\sum_{n\geq 0} v_n \sin nx$, $x \neq 2k\pi$ sont d'Abel donc convergentes

Exemples $\sum_{n\geq 1} \frac{\cos nx}{n^\alpha}$, $\sum_{n\geq 1} \frac{\sin nx}{n^\alpha}$ $\alpha > 0$ et $x \neq 2k\pi$ sont convergentes.

⚠ **Remarque** : Pour des séries à termes de signe quelconque et non absolument convergentes, prendre un équivalent du terme général peut induire en erreur. Mais des développements limités sont parfois utiles.

Exemple : $\sum u_n$, avec $u_n = \ln\left(1+\frac{(-1)^n}{n^a}\right)$ avec $n \geq 2$ et $a > 0$.

On a $\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + x^2 \varepsilon(x)$ au voisinage de 0 avec $\lim_{x \to 0} \varepsilon(x) = 0$.

Comme $\lim_{n \to +\infty} \frac{(-1)^n}{n^a} = 0$, alors

$$\ln\left(1+\frac{(-1)^n}{n^a}\right) = \frac{(-1)^n}{n^a} - \frac{1}{2n^{2a}}\left(1+\varepsilon'(n)\right) \quad \text{avec } \varepsilon'(n) \underset{n \to +\infty}{\longrightarrow} 0.$$

- On pose $v_n = \frac{1}{2n^{2a}}(1+\varepsilon'(n))$. $v_n \geq 0$ à partir d'un certain rang et $v_n \underset{+\infty}{\sim} \frac{1}{2n^{2a}}$

Or $\sum_n \frac{1}{2n^{2a}}$ converge ssi $a > \frac{1}{2}$ (Série de Riemann)

- $\sum_n \frac{(-1)^n}{n^a}$ est une série alternée $(a>0)$ convergente car $\frac{1}{n^a}$ décroît vers 0.

D'où $\sum_n \ln\left(1+\frac{(-1)^n}{n^a}\right)$ converge ssi $a > \frac{1}{2}$.

Mais si on prend $u_n = \ln\left(1+\frac{(-1)^n}{n^a}\right) \underset{+\infty}{\sim} \frac{(-1)^n}{n^a}$

Or $\sum_n \frac{(-1)^n}{n^a}$ est convergente $\forall a > 0$ et $\sum u_n$ diverge pour $a \in]0, \frac{1}{2}]$.

V. Restes : Calcul approché de la somme d'une série et erreur.

Jusqu'à présent, on surtout vu des résultats permettant de conclure quant à la convergence ou à la divergence des séries. En général, on ne connaît pas leur somme exacte. Cependant on peut dans certains cas donner une valeur approchée. C'est l'objet de ce paragraphe.

Soit $\sum u_n$ une série convergente et soit $S_N = \sum_{n=0}^{N} u_n$.

On appelle erreur d'ordre N le nombre

$$E_N = |S - S_N| \quad \text{avec } S = \sum_{n=0}^{+\infty} u_n.$$

On appelle reste d'ordre N le nombre $S - S_N$ noté R_N.
On peut facilement minorer $E_N = |R_N|$ dans certains cas.

1°/ Série $\sum u_n$ abs. convergente (par le critère de d'Alembert)

On a vu que $\exists k \in [0,1[$, $\exists n_0 \in \mathbb{N}$, $\forall n \geq n_0$ $\left|\frac{u_{n+1}}{u_n}\right| \leq k$

Dans ce cas, on a

$$|R_N| \leq \frac{k}{1-k}|u_N| \quad \text{pour } N \geq n_0.$$

Exemple : On a e (Nombre d'Euler) $= 1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \dots + \frac{1}{n!} + \dots$

On pose $S_n = 1 + \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k!}$ et $u_n = \frac{1}{n!}$.

On a $\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{1}{n+1} \leq \frac{1}{n_0+1}$ $\forall n \geq n_0$

$$|e - S_N| = \left|\frac{1}{(N+1)!} + \frac{1}{(N+2)!} + \dots\right| \qquad k = \frac{1}{N+1}$$

$$\leq \frac{k}{1-k} \cdot u_N = \frac{1}{N \cdot N!}$$

Ainsi : $|e - S_{12}| \leq \frac{1}{12 \cdot 12!}$

2°/ Série $\sum u_n$ abs. convergente (Par le critère de Cauchy)

On a vu que $\exists k \in [0,1[$, $\exists n_0 \in \mathbb{N}$, $\forall n \geq n_0$ $\sqrt[n]{|u_n|} \leq k$.

Dans ce cas

$$|R_N| \leq \frac{k^{N+1}}{1-k} \quad \forall N \geq n_0.$$

Exemple : $\sum_{n\geq 1} u_n$, $u_n = \left(\frac{n+1}{2n}\right)^n$. On applique le critère de Cauchy

$$\sqrt[n]{u_n} = \left(\frac{n+1}{2n}\right) \leq \underbrace{\frac{1}{2}\left(1 + \frac{1}{N}\right)}_{k} < 1 \quad \forall n \geq N \geq 2.$$

Le reste d'ordre n ($n \geq N$) s'écrit alors

$$|R_n| \leq \frac{k^{n+1}}{1-k} = \frac{1}{2^n}\left(1 + \frac{1}{N}\right)^{n+1} \times \frac{N}{N-1} \quad \forall n \geq N,\ N \geq 2.$$

3°/ Si la convergence est obtenue par la règle de Riemann

$\sum u_n$, $|u_n| \underset{+\infty}{\sim} \frac{A}{n^\alpha}$ $\alpha > 1$. Alors.

$$|R_n| \leq \frac{A}{(\alpha - 1) n^{\alpha - 1}} \quad \text{(s'obtient par une intégrale généralisée)}$$

4°/ $\sum (-1)^n |u_n|$ où $|u_n|$ décroît et tend vers 0.

Alors $|R_N| \leq |u_{N+1}|$ (*).

VI Propriétés d'associativité et de commutativité

VI. 1 Changement de l'ordre (Commutativité)

Théorème (Changement de l'ordre des termes d'une série)

Soit σ une permutation de l'ensemble $\mathbb{N}$ et soit $\sum u_n$ une série absolument convergente.

Alors, la série de terme général $v_n = u_{\varphi(n)}$ est absolument convergente et on a

$$\sum u_n = \sum u_{\varphi(n)}.$$

VI.2. Regroupements des termes (associativité)

Théorème : Soit $\sum u_n$ une série absolument convergente. On en distribue arbitrairement les termes de manières à former k séries $\sum v_{n,1}, \sum v_{n,2}, \dots, \sum v_{n,k}$. Ces séries sont alors absolument convergentes et on a

$$\sum_{n\geq 0} u_n = \sum_{n\geq 0} v_{n,1} + \sum_{n\geq 0} v_{n,2} + \dots + \sum_{n\geq 0} v_{n,k}$$

VII Produit de deux série

Proposition Soient $\sum_{n\geq 0} u_n$ et $\sum_{n\geq 0} v_n$ deux séries absolument convergente. On note $w_n = \sum_{k=0}^{n} u_k v_{n-k}$.

Alors $\sum_{n\geq 0} w_n$ est absolument convergente et

$$\sum_{n\geq 0} w_n = \sum_{n\geq 0} u_n \cdot \sum_{n\geq 0} v_n$$

Remarques 1/ $w_n = \sum_{k=0}^{n} u_k v_{n-k}$ est appelé produit de convolution de (u_n) et (v_n) à l'ordre n.

2/ On ne peut étendre le résultat de la proposition sur le produit de 2 séries absolument convergentes aux séries semi-convergentes.


ETUSUP.com